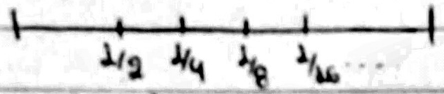
Σειρες πραγματικων αριθμων



$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots=1$

Μπορουμε να αθροισουμε απειρους στο πληθος ορους;

Ορισμος: Εστω $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθια πραγματικων αριθμων.
Για καθε $n\in\mathbb{N}$ θετουμε $s_n=a_1+\dots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

Δηλαδη $s_1=a_1$, $s_2=a_1+a_2$, ...

Το συμβολο $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ ειναι η σειρα με κ-οστο ορο a_k

Ο αριθμος $s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ ονομαζεται n-οστο μερικο αθροισμα της σειρας.

→ Αν η ακολουθια $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλινει $\lim s_n=s$ για καποιο $s\in\mathbb{R}$, γραφουμε $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=s$ και λεμε οτι η σειρα συγκλινει στο s. Ο αριθμος s λεγεται και αθροισμα της σειρας.

→ Αν η s_n τεινει στο $+\infty$ γραφουμε $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=+\infty$, και λεμε οτι η σειρα αποκλινει στο $+\infty$

→ Αν η s_n τεινει στο $-\infty$ γραφουμε $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=-\infty$, και λεμε οτι η σειρα αποκλινει στο $-\infty$

→ Αν η s_n δε συγκλινει σε καποιο πραγματικο αριθμο, τοτε λεμε οτι η σειρα αποκλινει.

Παρατηρηση: Πολλες φορες μας ενδιαφερουν σειρες της μορφης $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ η της μορφης $\sum_{k=m}^{\infty}a_k$, $m\geq 2$.

Για την πρωτη περιπτωση εχουμε 2 τροπους:

1ος: $s_1=a_0$, $s_2=a_0+a_1$, $s_3=a_0+a_1+a_2$, ...

2ος: $s_1=a_0+a_1$, $s_2=a_0+a_1+a_2$, $s_3=a_0+a_1+a_2+a_3$, ...

Για τη σειρά $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ μπορούμε να θέσουμε: $s_1 = a_m$
$s_2 = a_m + a_{m+1}$
$\dots$

Παρατήρηση: Γενικά δεν είναι εύκολο να βρούμε ένα κλειστό τύπο για το s_n. Στόχος είναι να αναπτύξουμε κάποια κριτήρια που θα μας επιτρέπουν να πούμε αν η (s_n) συγκλίνει.

Πρόταση. Αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = t$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Τότε $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda s + \mu t$ (I)

Απόδειξη:

Θέτουμε: $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda a_k + \sum_{k=1}^{n} \mu b_k$

Παρατηρούμε ότι $u_n = \lambda s_n + \mu t_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Εφόσον ξέρω $s_n \to s$ και $t_n \to t$ καθώς και $\lambda s_n \to \lambda s$ και $\mu t_n \to \mu t$, θα ισχύει $u_n \to \lambda s + \mu t$.
Επομένως ισχύει η (I)

Πρόταση: (a) Αν απαλείψουμε πεπερασμένο πλήθος αρχικών όρων μιας σειράς, δεν επηρεάζεται η σύγκλιση ή η απόκλιση της.

(b) Αν μεταβάλλουμε πεπερασμένο πλήθος όρων μιας σειράς, δεν επηρεάζεται η σύγκλιση ή η απόκλιση της.

Απόδειξη:

(a) Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Λέγοντας ότι απαλείψαμε τους όρους $a_1, \dots, a_{m-1}$ της σειράς, σημαίνει ότι θεωρούμε τη σειρά $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$. Αν ονομάσουμε $s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $t_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{m-1+k}$ τα μερικά αθροίσματα, $\forall n \geq m$: $s_n = a_1 + \dots + a_{m-1} + \underbrace{a_m + \dots + a_n}_{t_{n-m+1}}$

Άρα $s_n = \underbrace{a_1 + \dots + a_{m-1}}_{\text{σταθερά}} + t_{n-m+1}$. Έτσι η $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ανν συγκλίνει η $(t_{n-m+1})_{n \in \mathbb{N}}$, που συμβαίνει ανν η $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει.

Παρατηρηση: Αν $S_n \to S$ (δηλ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$) και $t_n \to t$ (δηλ $\sum_{k=m}^{\infty} a_k = t$)
Τοτε $S = (a_1 + \dots + a_{m-1}) + t$. (δηλ $\sum a_k = (a_1 + \dots + a_{m-1}) + \sum_{k=m}^{\infty} a_k$)

(β) Θεωρουμε τη σειρα $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Αλλαζοντας πεπερασμενο πληθος ορων της σειρας αυτης, σημαινει οτι θεωρω για νεα σειρα $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ωστε να υπαρχει $m \in \mathbb{N}$ ωστε $a_k = b_k \ \forall k \geq m$
Αν παραλειψουμε τους $m-1$ πρωτους ορους των δυο σειρων προκυπτει η ιδια σειρα $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$
Το συμπερασμα προκυπτει απο το α

Προταση: (α) Αν για σειρα $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλινουσα, τοτε $a_n \to 0$
(β) Αν η σειρα $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ειναι συγκλινουσα, τοτε $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N (= N(\varepsilon)) \in \mathbb{N}$ ωστε $\forall n \geq N$ να ισχυει $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| < \varepsilon$
Αποδειξη:
(α) Αν $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, n \in \mathbb{N}$ και $S_n \to S$ για κάποιο $S \in \mathbb{R}$. Παρατηρω πως $\forall n \in \mathbb{N}$ $S_n \to S$ και $S_{n-1} \to S$. Αρα $a_n = S_n - S_{n-1} = S - S = 0$

(β) Αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$ και θετουμε $b_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ εχουμε οτι $\forall n \in \mathbb{N}$
$S_n + b_n = (a_1 + \dots + a_n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$
Εφοσον $S_n \to S$, προκυπτει οτι $S - S_n \to 0$, δηλαδη $b_n \to 0$.
Απο τον ορισμο της ακολουθιας, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ ωστε $\forall n \geq N$ να ισχυει $|b_n| < \varepsilon$, δηλαδη $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| < \varepsilon$

Σημειωση: Το (α) της παραπανω προτασης χρησιμοποιειται κυριως ως κριτηριο αποκλισης. Δηλ αν $a_n \not\to 0$ τοτε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλινει.

Παραδειγματα:
α) $a_k = (-1)^{k+1}$ $k \in \mathbb{N}$
$S_1 = a_1 = 1$ Γενικα: $S_n = \begin{cases} 1, & \text{περιττος} \\ 0, & \text{αρτιος} \end{cases}$
$S_2 = a_1 + a_2 = 0$ $S_{2n-1} = 1 \to 1$ Αρα η (S_n) δεν συγκλινει, δηλ.
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1$ $S_{2n} = 0 \to 0$ η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλινει.
⋮

(β) Η γεωμετρική σειρά με λόγο λ

$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k$, $a_k=\lambda^k$, $k=0,1,2\ldots$, θέτοντας $S_n = a_0+\ldots+a_n$ παρατηρούμε ότι $\lambda \neq 1$

$S_n = 1+\lambda+\lambda^2+\ldots+\lambda^n = \frac{\lambda^{n+1}-1}{\lambda-1}$, ενώ αν $\lambda=1$, $S_n = 1+1+1+\ldots+1 = n+1$.

(i) Αν $|\lambda|\geq 1$ ώστε $\lambda^k \not\to 0$ άρα η S_n αποκλίνει.

(ii) Αν $|\lambda|<1$ τότε η $S_n = \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda} \to \frac{-1}{\lambda-1} = \frac{1}{1-\lambda}$

δηλαδή $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k = \frac{1}{1-\lambda}$

Γενικά αν $|\lambda|<1$ και $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ με $a_{k+1}=\lambda a_k$ $\forall k\in\mathbb{N}$

Με επαγωγή αποδεικνύεται ότι $a_k = a_1\lambda^{k-1}$. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{a_1}{1-\lambda}$

π.χ. $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$

ενώ $\sum \left(-\frac{1}{3}\right)^k = \frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = -\frac{1}{4}$.

(γ) Τηλεσκοπικές σειρές: ονομάζονται οι σειρές στις οποίες $a_k = b_k - b_{k+1}$ για κάποια γνωστή ακολουθία (b_k). Τότε

Πράγματι θέτοντας $S_n = a_1+\ldots+a_n$ έχω $S_n = (b_1-b_2)+\ldots+(b_n-b_{n+1}) =$
$= b_1 - b_{n+1}$

Έτσι αν $b_n\to b$, ανν $S_n \to b_1 - b$

π.χ. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k(k+1)}\right)$. Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \overset{b_k}{\frac{1}{k}} - \overset{b_{k+1}}{\frac{1}{k+1}}$

Έτσι $S_n = a_1+a_2+\ldots+a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1} \to 1$

Επομένως $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

(δ) Η αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

Απόδειξη: Θέτουμε $a_k=\frac{1}{k}$ $S_n = a_1+\ldots+a_n$

Παρατηρούμε ότι $\forall n\in\mathbb{N}$ $S_{2n}-S_n = \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right) - \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}$
$= n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Αν η σειρά συνέκλινε, δηλ. ίσχυε $S_n\to S$ για κάποιο $S\in\mathbb{R}$ τότε $S_{2n}\to S$ (υπακολουθία)

Άρα $S_{2n}-S_n \to S-S=0$. Όμως $S_{2n}-S_n \geq \frac{1}{2}$. Άτοπο. Άρα η σειρά αποκλίνει.

Το π.χ. αυτό δείχνει ότι δεν ισχύει το αντίστροφο στην προηγούμενη πρόταση. $a_k\to 0$ ενώ η σειρά αποκλίνει.